55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

21. März 2024

1. Es seien a, b und c reelle Zahlen größer als 1. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{ab}{c-1} + \frac{bc}{a-1} + \frac{ca}{b-1} \geq 12.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

2. Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Der Umkreis des Dreiecks BHC schneide AC ein weiteres Mal im Punkt P und AB ein weiteres Mal im Punkt Q.

Man zeige, dass H der Umkreismittelpunkt des Dreiecks APQ ist.

(Karl Czakler)

3. Auf einem Tisch sind zehntausend Streichhölzer, von denen zwei in einer Schüssel liegen.

Anna und Bernd spielen folgendes Spiel: Abwechselnd machen sie einen Zug, Anna beginnt. Ein Zug besteht darin, die Streichhölzer in der Schüssel abzuzählen, einen echten Teiler d dieser Anzahl auszuwählen und d Streichhölzer in die Schüssel dazuzugeben. Das Spiel ist zu Ende, wenn mehr als 2024 Streichhölzer in der Schüssel sind. Wer den letzten Zug gemacht hat, hat gewonnen.

Man beweise, dass Anna gewinnen kann, unabhängig davon, wie Bernd spielt.

(Anmerkung: Ein echter Teiler von n ist ein Teiler von n, der kleiner als n ist.)

(Richard Henner)

4. Es sei n eine positive ganze Zahl.

Man beweise, dass $a(n) = n^5 + 5^n$ genau dann durch 11 teilbar ist, wenn auch $b(n) = n^5 \cdot 5^n + 1$ durch 11 teilbar ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.